E.N.S.E.T. Section A_1 (M°)

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Dans tout le problème f *désigne une fonction continûment dérivable de* $]-1, 1[$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f''(0)$ *existe et* $f(0) = 0$.

On pose :

$$a = f'(0) \quad et \quad b = \frac{f''(0)}{2}.$$

Les trois parties sont indépendantes.

I

On suppose, dans cette partie, $0 < |a| < 1$ et on fixe r un nombre réel vérifiant : $|a| < r < |a|^{\frac{1}{2}}$.

1° Montrer qu'il existe un réel ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ tel que

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad |f'(x)| \leqslant r.$$

ε est supposé fixé ainsi dans toute la suite de cette partie.

Montrer :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad |f(x)| < \varepsilon.$$

On définit alors par récurrence la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par

$$f_0(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)],$$

et on pose pour $n \geqslant 0$ et x dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$U_n(x) = [a^{-n-1} f_{n+1}(x) - a^{-n} f_n(x)].$$

.../...

2° Démontrer :

$$\forall\, x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \forall\, n \geqslant 0 \quad |f'_n(x)| \leqslant r^n \quad \text{et} \quad |f_n(x)| \leqslant r^n\,|x|.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \quad a^{-n} f_n$$

existe au sens de la convergence uniforme sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (on pourra considérer la série de terme général U_n).

On pose, pour $|x| < \varepsilon$,

$$\theta(x) = \lim_{n\to\infty} \quad a^{-n} f_n(x).$$

3° Montrer que θ est continûment dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et que

$$\theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = 1, \quad \forall\, x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \theta[f(x)] = a\,\theta(x).$$

4° Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $U''_n(0)$ existe et calculer sa valeur.

Démontrer que $\theta''(0)$ existe et exprimer sa valeur en fonction de a et b $\left(\text{on pourra considérer la série de terme général } \dfrac{U'_n(x)}{x}\right)$.

5° Soit $\tilde{\theta}$ une fonction de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{\theta}(0) = 0$, $\tilde{\theta}'(0)$ existe et vaut 1, $\forall\, x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \tilde{\theta}[f(x)] = a\,\tilde{\theta}(x)$.

Montrer que

$$\forall\, x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \tilde{\theta}(x) = \theta(x).$$

II

On suppose, dans cette partie, $a = 1$ et $b < 0$.

1° On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$h(x) = \frac{x}{1 - bx}$$

et on définit par récurrence la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, +\infty[$ par :

$$h_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad h_n(x) = h[h_{n-1}(x)].$$

Calculer explicitement $h_n(x)$ en fonction de b, n, x

$\left(\text{on remarquera que, si } x \neq 0, \quad \dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{x} = -b\right)$.

2° Montrer qu'il existe un réel ε avec $0 < \varepsilon < 1$ tel que f est strictement croissante sur $[0, \varepsilon]$ et

$$\forall\, x \in]0, \varepsilon] \quad 0 < f(x) < x.$$

On suppose ε ainsi fixé dans la suite de cette partie et on définit, par récurrence, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions sur $[0, \varepsilon]$ par

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)].$$

3° Montrer que

$$\forall\, x \in [0, \varepsilon] \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

puis que

$$\forall\, x \in]0, \varepsilon] \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{f_{n+1}(x)} - \frac{1}{f_n(x)}\right] = -b,$$

et en déduire

$$\forall\, x \in]0, \varepsilon] \quad \lim_{n\to\infty} [-n\,b\,f_n(x)] = 1.$$

4° Soit θ une fonction strictement positive, strictement croissante et continue sur $[f(\varepsilon), \varepsilon]$ telle que

$$\theta[f(\varepsilon)] = \frac{\theta(\varepsilon)}{1 - b\,\theta(\varepsilon)}.$$

On prolonge θ à $[0, \varepsilon]$ en posant

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, x \in [f_{n+1}(\varepsilon), f_n(\varepsilon)[\quad \theta(x) = h_n[\theta(f_n^{-1}(x))]$$

(où $f_n^{-1}(x)$ est l'unique élément de $[f(\varepsilon), \varepsilon[$ dont l'image par f_n soit x) et

$$\theta(0) = 0.$$

.../...

Montrer les propriétés suivantes :

0 est strictement croissante et continue sur $[0, \varepsilon]$.

0 est dérivable à droite en 0 et de dérivée égale à 1.

$$\forall\, x \in [0, \varepsilon] \qquad 0\,[f(x)] = \frac{0\,(x)}{1 - b\,0\,(x)}.$$

III

On suppose, dans cette partie, $a = 0$ et $b \neq 0$.

1° Soit α un nombre réel. On définit par récurrence la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad g_n(x) = \alpha\,[g_{n-1}(x)]^2.$$

Expliciter $g_n(x)$ en fonction de α, n et x.

2° Montrer qu'il existe des réels ε et c tels que

$$0 < \varepsilon \leqslant 1,\ 0 < c,\ c\,\varepsilon < 1,\ \forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad b\,f(x) \geqslant 0 \text{ et}$$

$$\frac{|b|}{2}\,x^2 \leqslant |f(x)| \leqslant c\,x^2.$$

ε et c sont supposés fixés ainsi dans toute la suite de cette partie.

Montrer que l'on peut définir par récurrence une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)].$$

On pose, pour $n \geqslant 1$ et x dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$U_n(x) = [b\,f_{n+1}(x)]^{\frac{1}{2^{n+1}}} - [b\,f_n(x)]^{\frac{1}{2^n}}.$$

3° Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ de réels > 0 que l'on explicitera telles que

$$\forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \forall\, n \geqslant 1 \quad \alpha_n\,x^{2^n} \leqslant |f_n(x)| \leqslant \beta_n\,x^{2^n}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

uniformément par rapport à x sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

4° Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} (b\,f_n)^{\frac{1}{2^n}}$$

existe au sens de la convergence uniforme sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (on pourra considérer la série de terme général U_n).

On pose

$$\forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\quad 0\,(x) = \frac{s\,(x)}{|b|}\lim_{n\to\infty}[b\,f_n(x)]^{\frac{1}{2^n}}$$

avec $s(x) = 1$ si $x > 0$, $s(x) = -1$ si $x < 0$ et $s(0) = 0$.

5° Montrer que 0 est continue sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et que

$$\forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad 0\,[f(x)] = b\,[0\,(x)]^2.$$

6° Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{U_n(x)}{|x|}$$

existe et calculer sa valeur.

Montrer que $0'(0)$ existe et que $0'(0) = 1$

(on pourra considérer la série de terme général $\dfrac{U_n(x)}{|x|}$).

7° Soit $\tilde{0}$ une fonction continue de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$\tilde{0}(0) = 0$, $\tilde{0}'(0)$ existe et vaut 1, $\forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad \tilde{0}\,[f(x)] = b\,[\tilde{0}\,(x)]^2$.

Montrer que

$$\forall\, x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad \tilde{0}\,(x) = 0\,(x).$$